周期弱耗散的带旋度 Camassa-Holm 系统强解的整体存在性*

胡巧怡[1]，金 济[2]，林利云[1]，邱 华[1]
（1. 华南农业大学数学系，广东 广州 510642；
2. 华南农业大学工程学院，广东 广州 510642）

摘 要：研究一个周期弱耗散的带旋度 Camassa-Holm 系统。利用系统本身的结构和能量的耗散性，通过引入合适的 Lyapunov 函数，得到了强解的整体存在性。

关键词：带旋度 Camassa-Holm 系统；弱耗散；整体存在性
中图分类号：O175.29 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2012）03－0035－04

Global Existence for a Weakly Dissipative Periodic Camassa-Holm System with Vorticity

HU Qiaoyi[1], *JIN Ji*[2], *LIN Liyun*[1], *QIU Hua*[1]
（1. Department of Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China;
2. College of Engineering, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China）

Abstract: A weakly dissipative periodic Camassa-Holm system with vorticity is studied. Using the structure of the system and the dissipation of energy, by introducing a suitable Lyapunov function, the global existence of strong solution of the system is proved.

Key words: Camassa-Holm system with vorticity; weakly dissipative; global existence

最近 Ivanov 导出了一个带旋度的 Camassa-Holm 系统[1]

$$\begin{cases} y_t + Ay_x + y_x u + 2yu_x - Au_x + \rho\rho_x = 0, \\ \qquad t > 0, x \in \mathbf{R} \\ \rho_t + A\rho_x + (\rho u)_x = 0, \quad t > 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $y = u - u_{xx}$。该系统用于描述带常数旋度的浅水波模型。例如物理现实中的在月球和太阳引潮力作用下产生的周期性海水水平流动现象，就是一种带旋度的水流模型[2-4]。其中 $u(t,x)$ 表示流体的水平速度，$\rho(t,x)$ 是与平衡状态下水面的水平偏移有关的量，它们都是无量纲化的量。参数 $A > 0$ 表示水底的线性剪切流，因此系统（1）也是波流交互作用的模型[3]。

当 $\rho = A = 0$ 时，系统（1）变成经典的 Camassa-Holm方程，它可以用来描述水平底面浅水波的单向传播模型[3,5]。当 $A = 0, \rho \neq 0$ 时，系统（1）描述了不带旋度的浅水波方程[6]。此时的双分量 Camassa-Holm 系统可以与 AKNS 类的第一非负流等价[7]，并且还跟带时间参数的 Schrödinger 谱问题有关[7-8]。

对于 $A \neq 0, \rho \neq 0$ 的带旋度 Camassa-Holm 系统（1），非周期情形下的 Cauchy 问题在文［9］中被研究。作者得到了系统（1）在低指标的 Sobolev 空间 $H^s, s > \dfrac{3}{2}$ 中强解的爆破机制和整体存在性。

然而在许多实际情况下，人们不能忽视能量的耗散。Ott 等[10]曾经研究了能量耗散对 KdV 方程解的影响（包括对行波解的影响大小）。Ghidaglia[11]把弱耗散 KdV 方程作为有限维动力系统模型，研

* **收稿日期**：2011－09－10
基金项目：广东省自然科学基金资助项目（S2011040001127）；广东省教育厅育苗基金资助项目（LYM11030）
作者简介：胡巧怡（1979 年生），女，讲师；E-mail：huqiaoyi@scau.edu.cn

究了该方程解的长时间性态。吴书印和殷朝阳研究了周期和非周期的弱耗散 Camassa-Holm 方程强解的爆破、爆破率、整体存在性及其衰减性[12-13]。胡巧怡和殷朝阳研究了周期的弱耗散杆方程解的爆破性质[14]。

受此启发，我们考虑下面周期的弱耗散的带旋度 Camassa-Holm 系统

$$\begin{cases} y_t + Ay_x + y_x u + 2yu_x - Au_x + \rho\rho_x + \lambda y = 0, \\ \quad t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ \rho_t + A\rho_x + (\rho u)_x + \lambda\rho = 0, \quad t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \rho(0,x) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \\ u(t,x) = u(t,x+1), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}, \\ \rho(t,x) = \rho(t,x+1), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{2}$$

其中 λ 是非负弱耗散系数。本文主要研究系统（2）强解的整体存在性。为此先给出几个引理。

1 预备引理

设 $y = u - u_{xx}, G(x) = \dfrac{\cosh(x - [x] - 1/2)}{2\sinh(1/2)}$，$x \in \mathbf{R}$，则任给 $f \in L^2(S)$，有 $(1-\partial_x^2)^{-1} f = G * f$ 和 $G * y = u$ 直接计算，(2) 可写成

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \partial_x G * \left(u^2 + \dfrac{1}{2}u_x^2 + \dfrac{1}{2}\rho^2 - Au\right) + \lambda u = 0, \\ t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ \rho_t + (\rho u)_x + \lambda\rho = 0, \quad t > 0, x \in \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \rho(0,x) = \rho_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \\ u(t,x) = u(t,x+1), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}, \\ \rho(t,x) = \rho(t,x+1), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{3}$$

运用输送方程理论和 Besov 空间理论，类似文［15］定理 1.1 中的方法，可得系统（3）的局部适定性。

定理 1 给定 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in H^s(S) \times H^{s-1}(S)$，$s > \dfrac{3}{2}$，则存在 $T = T(A, \lambda, z_0) > 0$ 使得系统（3）存在唯一解，且 $z = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}$ 满足

$z = z(\cdot, z_0) \in C([0,T); H^s \times H^{s-1}) \cap C^1([0,T); H^{s-1} \times H^{s-2})$，并且解连续依赖于初值，即映射 $z_0 \to z = z(\cdot, z_0): H^s \times H^{s-1} \to C([0,T); H^s \times H^{s-1}) \cap C^1([0,T); H^{s-1} \times H^{s-2})$ 是连续的，最大存在时间 T 不依赖于 s。

运用输送方程的 Littlewood-Paley 分析和 Moser-型估计[16]，类似文［9］中定理 4.1 的方法，可得到如下的爆破机制。

定理 2[9] 设 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \rho_0 \end{pmatrix} \in H^s(S) \times H^{s-1}(S)$，$s > \dfrac{3}{2}$，令 T 是系统（3）对应于初值 z_0 的解 $z = \begin{pmatrix} u \\ \rho \end{pmatrix}$ 的最大存在时间。则 $T < \infty$ 当且仅当 $\lim\limits_{t\to T} \inf\limits_{x\in S}\{u_x(t,x)\} = -\infty$。

注 1 如果 $\rho = A = 0$，那么定理 2 覆盖了文［17-18］中关于 Camassa-Holm 方程的相应的结果。如果 $A = 0, \rho \neq 0$，那么定理 2 改进了文［19-20］中的结果（其中考虑的空间是 $H^s \times H^{s-1}, s \geqslant 2$）。

给定初值 $z_0 \in H^s(S) \times H^{s-1}(S), s > \dfrac{3}{2}$，由定理 1 保证了系统（3）强解的局部存在唯一性，即存在最大存在时间 $T > 0$ 和唯一的解 z，使得

$$z = z(\cdot, z_0) \in C([0,T); H^s \times H^{s-1}) \cap C^1([0,T); H^{s-1} \times H^{s-2})$$

考虑下面的初值问题

$$\begin{cases} q_t = u(t,q), \quad t \in [0,T), x \in \mathbf{R}, \\ q(0,x) = x, \quad x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{4}$$

其中 u 是系统（3）的解 z 的第一个分量。由 Sobolev 定理可知 $u(t,\cdot) \in C^1([0,T) \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$，因此由经典的常微分方程理论，可知方程（4）存在唯一解 q。q 的性质对研究系统（3）强解的爆破起到非常重要的作用，下面先给出两个关键性引理。

引理 1[6,19,21] 设 $z_0 \in H^s(S) \times H^{s-1}(S), s > \dfrac{3}{2}$，令 T 是系统（3）对应于初值 z_0 的解 z 的最大存在时间。则方程（4）存在唯一解 $q \in C^1([0,T) \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$。进一步，映射 $q(t,\cdot)$ 关于变量 x 是单增的，且是实轴 $\mathbf{R}$ 的微分同胚，并且

$$q_x(t,x) = \exp\left(\int_0^t u_x(s, q(s,x))\,\mathrm{d}s\right) > 0, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}$$

引理 2 设 $z_0 \in H^s(S) \times H^{s-1}(S), s > \dfrac{3}{2}$，令 T 是系统（3）对应于初值 z_0 的解 z 的最大存在时间。则有

$$\rho(t, q(t,x))q_x(t,x) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\rho_0(x), (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R} \tag{5}$$

进一步，如果存在 $x_0 \in S$，使得 $\rho_0(x_0) = 0$，那么对所有的 $t \in [0,T)$，都有 $\rho(t, q(t,x_0)) = 0$。

证明 在方程（5）的左边关于 t 求导，结合

方程（4）和（1）的第二个方程，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho(t,q(t,x))q_x(t,x)) = 0$$

这就证明了（5）。

引理 3　设 $z_0 \in H^s(S) \times H^{s-1}(S), s > \frac{3}{2}$，令 T 是系统（3）对应于初值 z_0 的解 z 的最大存在时间。则任给 $t \in [0,T)$，都有

$$\int_S (u^2 + u_x^2 + \rho^2)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\lambda t}\int_S (u_0^2 + u_{0,x}^2 + \rho_0^2)\mathrm{d}x$$

证明　在系统（3）的第一个方程关于 x 求导，得

$$u_{tx} = -\frac{1}{2}u_x^2 - uu_{xx} + u^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au - \partial_x G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au\right) - \lambda u_x \qquad (6)$$

在系统（3）的第一个方程两边同乘 u，在（6）两边同乘 u_x，在系统（3）的第二个方程两边同乘 ρ，将三者相加，然后再分部积分，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S (u^2 + u_x^2 + \rho^2)\mathrm{d}x = -2\lambda\int_S (u^2 + u_x^2 + \rho^2)\mathrm{d}x$$

解上述方程即可。

引理 4[22]

（i）任给 $f \in H^1(S)$，有 $\max_{x\in[0,1]} f^2(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}\|f\|_{H^1(S)}^2$，其中常数 $\frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}$ 是最优的。

（ii）任给 $f \in H^3(S)$，有 $\max_{x\in[0,1]} f^2(x) \leqslant c\|f\|_{H^1(S)}^2$，其中最佳的常数 c 是 $\frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}$。

由引理 3 和引理 4，得如下推论：

推论 1　设 $z_0 \in H^s(S) \times H^{s-1}(S), s > \frac{3}{2}$，令 T 是系统（3）对应于初值 z_0 的解 z 的最大存在时间。则对任意的 $t \in [0,T)$，都有

$$\|u\|_{L^\infty(S)}^2 \leqslant \frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}\|u\|_{H^1(S)}^2 \leqslant \frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}\left(\|u_0\|_{H^1(S)}^2 + \|\rho_0\|_{L^2(S)}^2\right)$$

3　解的整体存在性

本节研究周期的弱耗散带旋度 Camassa-Holm 系统强解的整体存在性。由函数 q 的性质和引理 1-4，我们可以得到系统（3）强解的整体存在性。

定理 3　给定 $z_0 \in H^s(S) \times H^{s-1}(S), s > \frac{3}{2}$，令 T 是系统（3）对应于初值 z_0 的解 z 的最大存在时间。若对任意的设 $x \in S$，都有设 $\rho_0(x) = 0$，则系统（1）的解 z 整体存在，即 $T = \infty$。

证明　由定理 2 知，只需证明存在 $M > 0$，使得对任意的 $t \in [0,T)$，都有 $\inf_{x\in S}\{u_x(t,x)\} \geqslant -M$。

由引理 1 和引理 2，我们知道 $\rho_0(x)$ 和 $\rho(t,q(t,x))$ 符号相同。由于对任意的 $x \in S$，都有 $\rho_0(x) = 0$，因此对任意的 $x \in S$，同样有 $\rho(t,q(t,x)) = 0$。

从引理 1，可知映射 $q(t,x)$ 是实轴 $\mathbf{R}$ 的单增的微分同胚。由 u_x 的周期性和 $q(t,x)$ 的性质，有 $\inf_{x\in\mathbf{R}} u_x(t,q(t,x)) = \inf_{x\in\mathbf{R}} u_x(t,x) = \inf_{x\in S} u_x(t,x)$。令 $m(t,x) = u_x(t,q(t,x))$，就有 $\inf_{x\in\mathbf{R}} m(t,x) = \inf_{x\in S} u_x(t,x)$。

下面我们考虑如下的辅助函数[9]

$$w(t,x) = \rho(0,x)\rho(t,q(t,x)) + \frac{\rho(0,x)}{\rho(t,q(t,x))}(1 + m^2(t,x))$$

由 Sobolev 嵌入定理，有

$$0 \leqslant w(0,x) \leqslant \|\rho(0,x)\|_{L^\infty}^2 + \|u(0,x)\|_{H^1}^2 + 1 \leqslant \|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}} + 1$$

由 $m(t,x)$ 的定义和系统（3）的第一个方程，有

$$\frac{\partial}{\partial t}m(t,x) = (u_{tx} + uu_{xx})(t,q(t,x)) \qquad (7)$$

将点 $(t,q(t,x))$ 代入式（7），得

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -\frac{1}{2}m^2 - uu_{xx} + (u^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au)(t,q(t,x)) - \partial_x G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au\right)(t,q(t,x)) - \lambda m \qquad (8)$$

对 $w(t,x)$ 关于 t 求导，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 2\frac{\rho(0,x)}{\rho(t,q(t,x))}m(t,x)\cdot\left[u^2 - Au - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au\right) + \frac{1}{2} - \lambda m\right] \leqslant 2\frac{\rho(0,x)}{\rho(t,q(t,x))}m(t,x)\cdot\left[u^2 - Au - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au\right) + \frac{1}{2}\right] \leqslant$$

$$2\frac{\rho(0,x)}{\rho(t,q(t,x))}(1 + m^2(t,x))\cdot\left|u^2 - Au - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au\right) + \frac{1}{2} - \lambda m\right| \leqslant \left|u^2 - Au - G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\rho_2 - Au\right) + \frac{1}{2} - \lambda m\right| w(t,x) \leqslant$$

$$\left(\frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}E_0 + A\sqrt{\frac{\mathrm{e}+1}{2(\mathrm{e}-1)}E_0} + \frac{\cosh(1/2)}{2\sinh(1/2)}\cdot\right.$$

$$\left(\frac{e+1}{2(e-1)}E_0 + A\sqrt{\frac{e+1}{2(e-1)}E_0} + \frac{1}{2}\right)w(t,x)$$

其中 $E_0 = \|u_0\|^2_{H^1(S)} + \|\rho_0\|^2_{L^2(S)}$。这里我们用到了 Young 不等式，推论 1 和 $G(x)$ 的性质：$G(x) \leqslant \frac{\cosh(1/2)}{2\sinh(1/2)}$ 和 $\|u\|_{L^1(S)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(S)}$。

由 Gronwall 不等式，就有

$$w(t,x) \leqslant w(0,x)e^{Kt} \leqslant (\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}} + 1)e^{KT}$$

其中 $K = \frac{e+1}{2(e-1)}E_0 + A\sqrt{\frac{e+1}{2(e-1)}E_0} + \frac{\cosh(1/2)}{2\sinh(1/2)}\left(\frac{e+1}{2(e-1)}E_0 + A\sqrt{\frac{e+1}{2(e-1)}E_0}\right) + \frac{1}{2}$。

另一方面，我们有

$w(t,x) \geqslant 2\sqrt{\rho^2(0,x)(1+m^2)} \geqslant 2a|m(t,x)|$ 其中 $a = \inf_{x\in S}|\rho_0(x)| > 0$.

因此，推出

$$m(t,x) \geqslant -\frac{1}{2a}w(t,x) \geqslant -\frac{1}{2a}(\|z_0\|_{H^s\times H^{s-1}} + 1)e^{KT} := -M$$

定理证毕。

参考文献：

[1] IVANOV R. Two-component integrable systems modelling shallow water waves: The constant vorticity case [J]. Wave Motion, 2009, 46: 389 – 396.

[2] CONSTANTIN A, ESCHER J. Analyticity of periodic traveling free surface water waves with vorticity [J]. Ann of Math, 2011, 173: 559 – 568.

[3] JOHNSON R S. The Camassa-Holm equation for water waves moving over a shear flow [J]. Fluid Dynam Res, 2003, 33: 97 – 111.

[4] DA SILVA A F T, PEREGRINE D H. Steep, steady surface waves on water of finite depth with constant vorticity [J]. J Fluid Mech, 1988, 195: 281 – 302.

[5] CAMASSA R, HOLM D. An integrable shallow water equation with peaked solitons [J]. Phys Rev Lett, 1993, 71: 1661 – 1664.

[6] CONSTANTIN A, IVANOV R. On an integrable two-component Camassa-Holm shallow water system [J]. Phys Lett A, 2008, 372: 7129 – 7132.

[7] CHEN M, LIU S, ZHANG Y. A 2-component generalization of the Camassa-Holm equation and its solutions [J]. Lett Math Phys, 2006, 75: 1 – 15.

[8] ANTONOWICZ M, FORDY A P. Factorisation of energy dependent Schrödinger operators: Miura maps and modified systems [J]. Comm Math Phys, 1989, 124(3): 465 – 486.

[9] GUI G, LIU Y. On the global existence and wave-breaking criteria for the two-component Camassa- Holm system [J]. J Funct Anal, 2010, 258: 4251 – 4278.

[10] OTT E, SUDAN R N. Damping of solitary waves [J]. Phys Fluids, 1970, 13: 1432 – 1434.

[11] GHIDAGLIA J M. Weakly damped forced Korteweg-de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time [J]. J Differential Equations, 1988, 74: 369 – 390.

[12] WU S L, YIN Z Y. Blow-up, blow-up rate and decay of the solution of the weakly dissipative Camassa-Holm equation [J]. J Math Phys, 2006, 47 (1): 013504.

[13] WU S L, YIN Z Y. Blow-up and decay of the solution of the weakly dissipative Degasperis-Procesi equation [J]. SIAM J Math Anal, 2008, 40: 475 – 490.

[14] HU Q, YIN Z. Blowup and blowup rate of solutions to a weakly dissipative periodic rod equation [J]. J Math Phys, 2009, 50(8): 0803503.

[15] GUI G, LIU Y. On the Cauchy problem for the two-component Camassa-Holm system [J]. Math Z, 2010, 268(1/2): 45 – 66.

[16] CHEMIN J Y. Localization in Fourier space and Navier-Stokes system [J]. Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, CRM Series, Scuola Norm Sup, Pisa, 2004, (1): 53 – 135.

[17] LI Y, OLVER P. Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation [J]. J Differential Equations, 2000, 162: 27 – 63.

[18] RODRIGUEZ-BLANCO G. On the Cauchy problem for the Camassa-Holm equation [J]. Nonlinear Anal, 2001, 46: 309 – 327.

[19] HU Q, YIN Z. Well-posedness and blow-up phenomena for the periodic 2-component Camassa-Holm equation [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 2011, 141(1): 93 – 107.

[20] HU Q, YIN Z. Global existence and blow-up phenomena for the periodic 2-component Camassa-Holm equation [J]. Monatsh Math, 2011, 165: 217 – 235.

[21] ESCHER J, LECHTENFELD O, YIN Z. Well-posedness and blow-up phenomena for the 2-component Camassa-Holm equation [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2007, 19: 493 – 513.

[22] YIN Z. On the blow-up of solutions of a periodic nonlinear dispersive wave equation in compressible elastic rods [J]. J Math Anal Appl, 2003, 288: 232 – 245.